

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
8 FEBRUARIE 2025
CLASA a V-a – SOLUȚII ȘI BAREME

Problema 1

Aflați numărul natural \overline{abcd} pentru care $\overline{abcd} - 2 \cdot \overline{abc} = 2024$.

(*Gazeta Matematică*)

Soluție:

Descompunem în baza 10 și relația devine:

$$\overline{abc} \cdot 10 + d - 2 \cdot \overline{abc} = 2024. \dots\dots\dots 2p$$

$$\overline{abc} \cdot 8 + d = 2024 \dots\dots\dots 1p$$

$$2024 = 8 \cdot 253 \Rightarrow d : 8 \text{ și cum } d \text{ este cifră} \Rightarrow d \in \{0; 8\} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Soluțiile } \overline{abcd} \in \{2530; 2528\} \dots\dots\dots 2p$$

Problema 2 (7 puncte)

Fie șirul de numere naturale: 2, 5, 8, 11,...

- a) Numărul 2188 este termen al șirului? Justificați răspunsul.
- b) Al câtelea termen al șirului este numărul 599?
- c) Dacă termenii șirului sunt scriși pe o tablă și se șterg oricare doi dintre ei și se scrie în loc diferența sau suma celor două numere șterse, arătați că noul număr scris pe tablă nu este termen al șirului .

Soluție:

a) Se observă că fiecare termen al șirului este de forma $3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$.

$$2188 = 3 \cdot 729 + 1 \text{ și atunci } 2188 \text{ nu este termen al șirului.} \dots\dots\dots 2p$$

b) $599 = 3 \cdot 199 + 2$ și cum $2 = 3 \cdot 0 + 2$ atunci 599 este al 200-lea termen al șirului. $\dots\dots\dots 1p$

$$\begin{aligned} c) (3k + 2) + (3p + 2) &= 3k + 3p + 4 = 3k + 3p + 3 + 1 = \\ 3(k + p + 1) + 1 &\Rightarrow \text{suma a doi termeni nu este termen al șirului} \dots\dots\dots 2p \\ (3k + 2) - (3p + 2) &= 3k - 3p = 3(k - p) \Rightarrow \text{diferența a doi termeni nu} \\ &\text{este termen al șirului} \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$

Problema 3 (7 puncte)

a) Să se arate că numerele $A = 2026^{2006} + 2027^{2007}$ și

$$B = 2027^{2007} + 2028^{2008} \text{ dau același rest la împărțirea lor la 5.}$$

b) Scrieți în ordine crescătoare numerele a, b și c dacă

$$a = 6^{146} - 4 \cdot 6^{145} - 11 \cdot 36^{72}, \quad b = 5^{144} \quad \text{și} \quad c = 7^{95}.$$

Soluție:

a) Se află ultima cifră a fiecărui număr.

$$u(A) = u(6 + 3) = 9 \dots\dots\dots 1p$$

$$u(B) = u(3 + 6) = 9 \dots\dots\dots 1p$$

Restul împărțirii numerelor A și B la 5 este 4 $\dots\dots\dots 1p$

b) $a = 6^{146} - 4 \cdot 6^{145} - 11 \cdot 36^{72} = 6^{146} - 4 \cdot 6^{145} - 11 \cdot 6^{144}$

$$a = 6^{144} \cdot (36 - 24 - 11) = 6^{144} \Rightarrow b < a \dots\dots\dots 2p$$

$$7^{95} < 8^{95} = (2^3)^{95} = 2^{285} \dots\dots\dots 1p$$

$$5^{144} > 4^{144} = (2^2)^{144} = 2^{288} > 2^{285}. \text{ Deci } 7^{95} < 5^{144} \Rightarrow c < b < a. \dots\dots 1p$$

Problema 4 (7 puncte)

De ziua ei, Ana dorește să ofere colegilor ei bomboane. Ea primește de la ambii părinți câte o cutie cu același număr de bomboane. Dacă ar împărți bomboanele dintr-o cutie la 4 colegi i-ar mai rămâne pentru sora sa 3 bomboane, iar dacă ar împărți bomboanele din cealaltă cutie la 6 colegi i-ar mai rămâne pentru sora sa o singură bomboană. Câte bomboane i-ar rămâne pentru sora sa dacă ar împărți bomboanele din ambele cutii celor 24 de colegi ai săi?

Soluție:

Fie n numărul bomboanelor dintr-o cutie, $n = 4 \cdot x + 3. \dots\dots\dots 1p$

$$n = 6 \cdot y + 1. \dots\dots\dots 1p$$

Înmulțind prima egalitate cu 6, iar a doua cu 4, obținem $6 \cdot n = 24 \cdot x + 18$ și

$$4 \cdot n = 24 \cdot y + 4 \dots\dots\dots 2p$$

Scad relațiile și obținem $2 \cdot n = 24 \cdot (x - y) + 14 \dots\dots\dots 2p$

Dacă Ana împarte ambele cutii celor 24 de colegi, rămân 14 bomboane pentru sora sa
 $\dots\dots\dots 1p$



BAREM - OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapă locală – 2025

Clasa a VI-a

PROBLEMA 1:

Se dau mulțimile $A = \{a | a = 2n, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b | b = 5m + 3, m \in \mathbb{N}\}$ și $C = \{x | x = p^2, p \in \mathbb{N}\}$

- Aflați $B \cap C$.
- Determinați suma primelor 100 de elemente din $A \cap B$, scrise în ordine crescătoare.

Soluție:

- $u(b) = u(5m + 3) \in \{3, 8\} \dots\dots\dots 1p$
 $u(x) = u(p^2) \neq 3, 8, \text{ oricare } p \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$
 $\text{deci } B \cap C = \emptyset \dots\dots\dots 1p$
- $A \text{ este mulțimea numerelor pare} \left. \begin{array}{l} u(b) = u(5m + 3) \in \{3, 8\} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cap B = \{a | u(a) = 8\} \Rightarrow$
 $A \cap B = \{8, 18, 28, \dots\} \dots\dots\dots 1p$
 $S = 8 + 18 + 28 + 38 + \dots + 998 \dots\dots\dots 1p$
 $\text{Calculul sumei, } S=50300 \dots\dots\dots 2p$

PROBLEMA 2:

Fie șirul de fracții ordinare $\frac{2054}{30}, \frac{2055}{31}, \frac{2056}{32}, \dots$

- Stabiliți o regulă de formare a șirului și scrieți următorii 5 termeni.
- Aflați câți termeni ai șirului sunt numere naturale.

(Supliment G.M. 10/2024)

Soluție:

- $\text{Regula } a_{n+1} = \frac{2054+n}{30+n}, \text{ unde } n \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \dots\dots\dots 1p$
 $\text{Următorii 5 termeni } \frac{2057}{33}, \frac{2058}{34}, \frac{2059}{35}, \frac{2060}{36}, \frac{2061}{37} \dots\dots\dots 2p$
- $\frac{2054+n}{30+n} \in \mathbb{N} \Rightarrow (2054 + n) : (30 + n) \dots\dots\dots 1p$
 $\text{Dar } (30 + n) : (30 + n) \Rightarrow 2024 : (30 + n) \dots\dots\dots 1p$
 $30 + n \in \{1, 2, 4, 8, 11, 23, 44, 46, 88, 92, 184, 253, 506, 1012, 2024\}$
 $\dots\dots\dots 1p$



$n \in \{14, 16, 58, 62, 154, 223, 476, 982, 1994\} \Rightarrow 9$ termeni sunt numere naturale
.....1p

PROBLEMA 3:

Numerele naturale a și b reprezintă măsurile a două unghiuri adiacente suplementare $\angle AOB$ și respectiv $\angle BOC$. Aflați măsura $\angle COM$, dacă semidreapta OM este opusă semidreptei OB , $(a, b) = 6$ și $b : 19$. Se consideră (a, b) – cel mai mare divizor comun al numerelor a și b .

Soluție:

$$(a, b) = 6 \Rightarrow a = 6x, b = 6y \text{ și } (x, y) = 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$a + b = 180 \Rightarrow 6x + 6y = 180 \Rightarrow x + y = 30 \dots\dots\dots 2p$$

$$\left. \begin{array}{l} b : 19 \\ b = 6y \end{array} \right\} \Rightarrow y : 19 \Rightarrow y = 19 \text{ și } x = 11 \Rightarrow a = 66^\circ \text{ și } b = 114^\circ \dots\dots\dots 2p$$

$$\angle COM = \angle AOB = 66^\circ \text{ (unghiuri opuse la vârf)} \dots\dots\dots 1p$$

PROBLEMA 4:

Se consideră unghiurile adiacente $\angle AOB$ și $\angle BOC$ astfel încât bisectoarele lor OM , respectiv ON , formează un unghi de 75° și $2 \cdot \angle AOB = 3 \cdot \angle BOC$.

- Determinați măsurile unghiurilor $\angle AOB$ și $\angle BOC$.
- Dacă $OP \perp OM$ astfel încât M și P sunt de aceeași parte cu B față de AO , demonstrați că semidreapta OP este bisectoarea unghiului $\angle CON$.

Soluție:

- Realizarea figurii1p

$$\angle MON = \angle MOB + \angle BON = \frac{\angle AOB}{2} +$$

$$\frac{\angle BOC}{2} = 75^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AOB + \angle BOC = 150^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$2\angle AOB + 2\angle BOC = 300^\circ$$

$$\Rightarrow 5\angle BOC = 300^\circ \Rightarrow$$

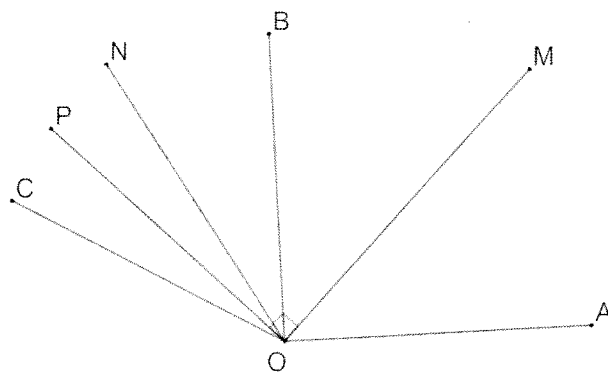
$$\angle BOC = 60^\circ \text{ și } \angle AOB = 90^\circ \dots\dots\dots 2p$$

- $\angle NOP = \angle MOP - \angle MON = 15^\circ \dots\dots\dots 1p$

$$\angle CON = \frac{\angle BOC}{2} = 30^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\angle POC = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ$$

$$\Rightarrow \angle POC \equiv \angle PON \Rightarrow OP \text{ bisectoarea unghiului } \angle CON \dots\dots\dots 1p$$



BAREM OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală -2025, 08.02.2025

CLASA a VII-a

Problema 1. Se consideră numerele reale $a = \sqrt{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \sqrt{6} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$ și

$b = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2} + \sqrt{5})^2} - \sqrt{8}$. Demonstrați că $\frac{b}{2} - a$ este un număr natural prim.

Soluție :

$$a = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} - \frac{6}{2} = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 3 = \sqrt{5} - 3 \dots\dots\dots 2p$$

$$\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = -2 + \sqrt{5}, \text{ pentru ca } 2 - \sqrt{5} < 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt{(2\sqrt{2} + \sqrt{5})^2} = |2\sqrt{2} + \sqrt{5}| = 2\sqrt{2} + \sqrt{5}, \text{ pentru ca } 2\sqrt{2} + \sqrt{5} > 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$b = -2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{5} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{5} - 2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{b}{2} - a = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{2} - (\sqrt{5} - 3) = \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5} + 3 = 2 \text{ care este un numar natural prim.} \dots\dots\dots 2p$$

Problema 2.

a) Demonstrați că $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, unde n este un număr natural nenul.

b) Demonstrați că numărul $a = \sqrt{1} + \sqrt{1 + 3 + 5} + \sqrt{1 + 3 + 5 + 7 + 9} + \dots + \sqrt{1 + 3 + 5 + \dots + 2025}$ este număr natural pătrat perfect.

Soluție :

a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2n - 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{2n(2n+1)}{2} - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(2n + 1) - n(n + 1) = 2n^2 + n - n^2 - n = n^2 \dots\dots\dots 3p$

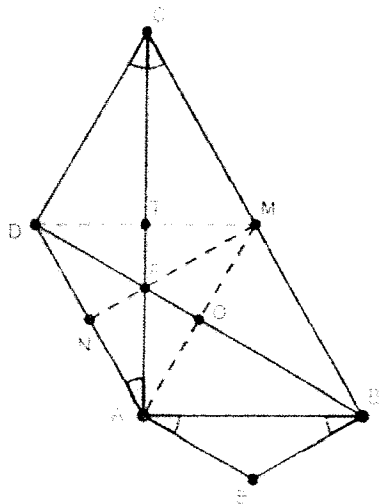
b) Pentru fiecare suma din radical aplicăm punctul a) și obținem :

$$\sqrt{1} = 1, \sqrt{1 + 3 + 5} = \sqrt{3^2} = 3; \sqrt{1 + 3 + 5 + 7 + 9} = \sqrt{5^2} = 5$$

$$\sqrt{1 + 3 + 5 + \dots + 2025} = \sqrt{1013^2} = 1013 \dots\dots\dots 2p$$

$$a = 1 + 3 + 5 + \dots + 1013 = 507^2 \dots\dots\dots 2p$$

Problema 3. Fie $\triangle ABC$ cu $\angle A = 90^\circ$ și $\angle C = 30^\circ$. În exteriorul său construim triunghiurile isoscele ADC și AEB astfel încât $\angle ADC = \angle AEB = 120^\circ$. Știind că M este mijlocul laturii BC și $\{F\} = AC \cap BD$, arătați că patrulaterul $DABM$ este romb și că $EF \parallel BC$. (G.M.)



Soluție :

În $\triangle ADC$ –isoscel cu $\angle ADC = 120^\circ$ rezulta $\angle DAC = \angle DCA = 30^\circ$

Din $\angle DAC = \angle ACB = 30^\circ$ –alterne interne congruente se obtine $AD \parallel BC$ (1).....1p

Trapezul $ADCB$ are unghiurile $\angle ABC = \angle DCB = 60^\circ$ deci este isoscel de unde $AB \equiv CD$ (2)

În $\triangle ABC$ cu $\angle A = 90^\circ$, AM –mediana rezulta cf th .mediane $AM \equiv BM \equiv MC \left(= \frac{BC}{2} \right)$ (3) și pentru ca $\angle ABM = 60^\circ$ se obtine $\triangle ABM$ echilateral de unde $AB \equiv AM \equiv BM$.(4)

În $\triangle ADC$ –isoscel cu $AD \equiv CD$ și folosind $AB \equiv CD$ (2) și $AB \equiv BM$.(4)

rezulta $AD \equiv BM$, dar pt ca $AD \parallel BM$ – din (1), se obtine $ADMB$ – paralelogram

cum $AB \equiv BM$.(4) rezulta $ADMB$ -romb.....3p

$ADCB$ –trapez isoscel și $AC \cap BD = \{F\}$, se arata ca $\triangle FBC$ –isoscel, FM –mediana deci va fi și înălțime de unde $FM \perp BC$1p

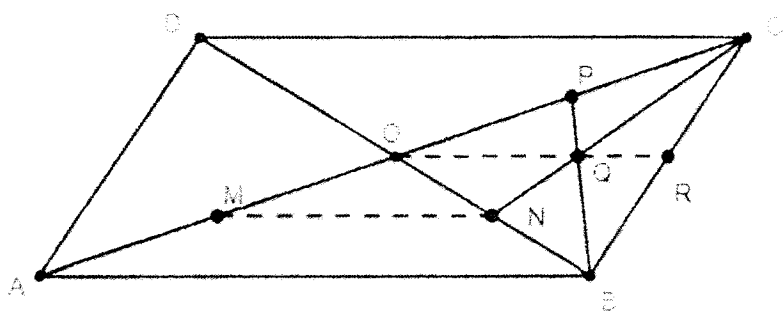
$\angle EBM = \angle EBA + \angle ABC = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ deci $EB \perp BC$, de unde $FM \parallel EB$1p

$\triangle FMB \equiv \triangle FAB$ (I.C.) $\Rightarrow FM \equiv FA$, $\triangle FAM \equiv \triangle EAB$ (ULU) –

(isoscele cu unghiuri de la baza de 30° .) deci $FM = EB$ de unde $BEFM$ este dreptunghi deci $EF \parallel BC$1p

Problema 4. Se consideră $ABCD$ un paralelogram și O intersecția diagonalelor, iar punctele M , N și P sunt mijloacele segmentelor AO , OB respectiv OC . Notăm cu $\{Q\} = BP \cap CN$.

- a) Demonstrați că $OQ \parallel AB$ și calculați valoarea raportului $\frac{OQ}{AB}$.
b) Aflați raportul dintre aria trapezului $CNMD$ și aria paralelogramului $ABCD$.



Soluție :

- a) BP și CN –mediane în $\triangle BOC$ deci Q -centru de greutate1p
 $OQ \cap BC = \{R\}$ și R -mijloc BC rezulta OR linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow OR \parallel AB, OR = \frac{AB}{2}$ 1p
 MN linie mijlocie în $\triangle AOB \Rightarrow MN \parallel AB$, și se obține $OQ \parallel AB$1p
 Q -centru de greutate în $\triangle BOC$ rezulta $OQ = \frac{2}{3} \cdot OR = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{AB}{3}$1p
b) $A_{CNMD} = A_{\triangle MON} + A_{\triangle CON} + A_{\triangle COD} + A_{\triangle MOD}$1p

$$A_{\triangle MON} = \frac{1}{4} \cdot A_{\triangle AOB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} A_{ABCD} = \frac{1}{16} \cdot A_{ABCD}$$

$$A_{\triangle CON} = \frac{1}{2} \cdot A_{\triangle COB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot A_{ABCD} = \frac{1}{8} \cdot A_{ABCD}$$

$$A_{\triangle COD} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABCD} \text{ și } A_{\triangle MOD} = A_{\triangle CON} = \frac{1}{8} \cdot A_{ABCD} \dots\dots\dots 1p$$

$$A_{CNMD} = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) \cdot A_{ABCD} = \frac{9}{16} \cdot A_{ABCD} \dots\dots\dots 1p$$

Notă : orice soluție corectă, diferită de cea din barem se punctează corespunzător .

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală 8.02. 2025

JUDEȚUL BUZĂU

CLASA a VIII-a – soluții

Problema 1. a) Determinați numerele raționale a și b pentru care este adevărată egalitatea:

$$\sqrt{2a^2 - 12a + 18} - 2\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot (b^2 - 8)^2} + \sqrt{2}$$

b) Determinați suma soluțiilor ecuației $x + \{x\} = 5$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x .

Barem (orientativ):

a)

$$\sqrt{2a^2 - 12a + 18} - 2\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot (b^2 - 8)^2} + \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{(b^2-8)^2} + 3\sqrt{2} \quad 1p$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{(b^2-8)^2} + 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot |a-3| + \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot |b^2-8| + 3\sqrt{2} \quad 1p$$

$$\begin{cases} |a-3| = 3 \\ |b^2-8| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3 = \pm 3 \\ b^2-8 = \pm 1 \end{cases} \quad 1p$$

$$a \in \{0;6\}; b \in \{-3;3\} \quad 1p$$

$$b) x + \{x\} = 5 \Leftrightarrow x + x - [x] = 5 \Leftrightarrow [x] = 2x - 5 \Rightarrow 2x - 5 = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{k+5}{2} \quad 1p$$

$$\left[\frac{k+5}{2} \right] = k \Leftrightarrow k \leq \frac{k+5}{2} < k+1 \Rightarrow k \in \{4;5\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{9}{2}; 5 \right\} \quad 1p$$

$$x_1 + x_2 = \frac{9}{2} + 5 = \frac{19}{2} \quad 1p$$

Problema 2. Aflați toate perechile $(x;y)$ de numere naturale nenule care verifică relația:
 $y^2 - y - x^2 + x = 24$.

Barem (orientativ):

$$y^2 - y - x^2 + x = 24 \Leftrightarrow (y^2 - x^2) - (y - x) = 24 \quad 1p$$

$$(y^2 - x^2) - (y - x) = 24 \Leftrightarrow (y - x)(y + x - 1) = 24 \quad 1p$$

$$x, y > 0 \Rightarrow x + y - 1 > 0 \Rightarrow y - x > 0 \Leftrightarrow y > x \text{ și } x + y - 1 > y - x \quad 1p$$

$$y - x \in \{1;2;3;4\} \text{ și } x + y - 1 \in \{24;12;8;6\} \quad 2p$$

$$(x;y) \in \{(3;6);(12;13)\} \quad 2p$$

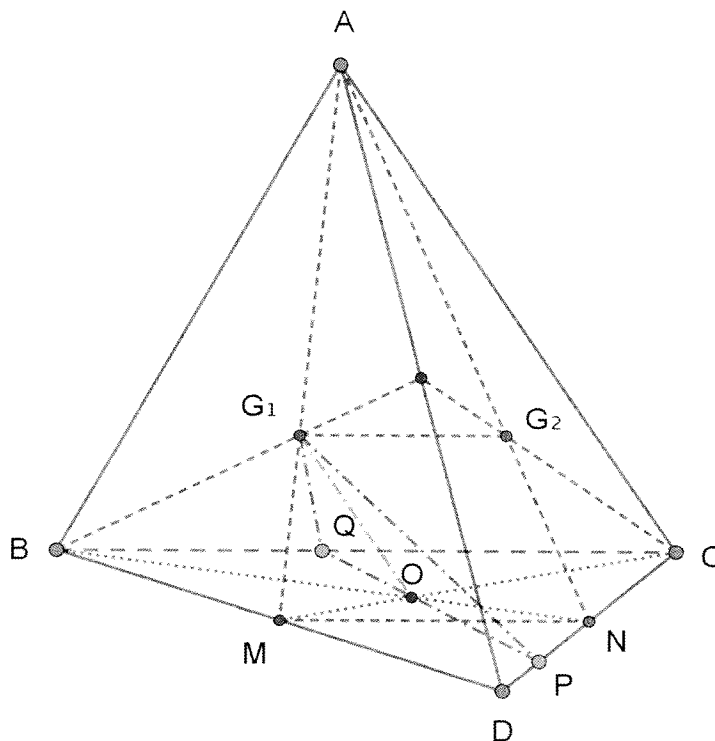
Problema 3. Fie ABCD un tetraedru cu baza BCD triunghi echilateral, iar G_1 și G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ABD respectiv ACD.

a) Arătați că $G_1 G_2 \parallel (BCD)$.

b) Considerăm o dreaptă PQ, $P \in (CD)$ și $Q \in (BC)$ ce conține centrul bazei. Arătați că $AC \parallel (G_1 PQ)$.

S.G.M 10, 2024

Barem (orientativ):



a) Fie M, N mijloacele laturilor DB respectiv DC. G_1 și G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ABD

$$\text{respectiv ACD} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AG_1}{G_1M} = \frac{2}{1} \\ \frac{AG_2}{G_2N} = \frac{2}{1} \end{cases} \Rightarrow \frac{AG_1}{G_1M} = \frac{AG_2}{G_2N} \stackrel{\text{R.T.Th.}}{\Rightarrow} G_1G_2 \parallel MN \dots\dots\dots 2p$$

$$\begin{cases} G_1G_2 \parallel MN \\ MN \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 \parallel (BCD) \dots\dots\dots 1p$$

$$b) \begin{cases} \frac{MG_1}{G_1A} = \frac{1}{2} \\ \frac{MO}{OC} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{MG_1}{G_1A} = \frac{MO}{OC} \stackrel{\text{R.T.Th.}}{\Rightarrow} G_1O \parallel AC \dots\dots\dots 2p$$

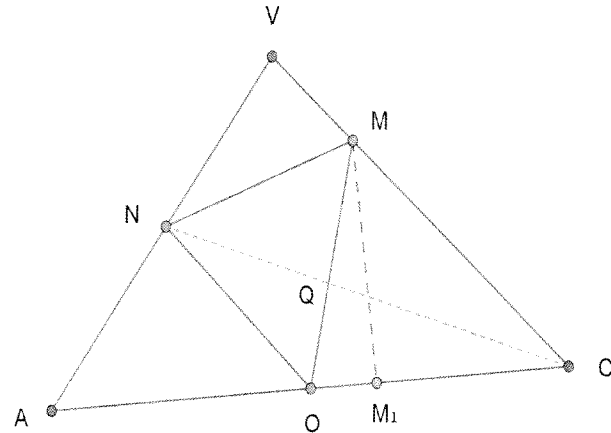
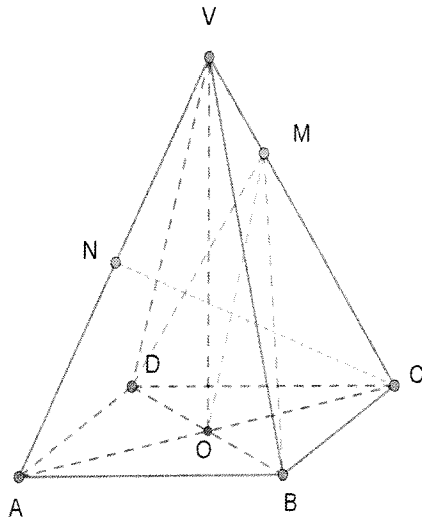
$$\begin{cases} AC \parallel G_1O \\ G_1O \subset (G_1PQ) \end{cases} \Rightarrow AC \parallel (G_1PQ) \dots\dots\dots 2p$$

Problema 4. Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată cu $VA = AB = 12$ cm. Punctul $M \in (VC)$, punctul $N \in (VA)$ astfel încât $VM = \frac{VC}{4}$ și $VN = NA$.

a) Calculați măsura unghiului dintre dreptele CM și AB.

b) Arătați că dreapta CN este perpendiculară pe la planul (MBD).

Barem (orientativ):



- a) $DC \parallel AB \Rightarrow \angle(CM;AB) = \angle(CM;CD) = \angle MCD \dots\dots\dots 1p$
 $\triangle VCD$ echilateral $\Rightarrow \angle MCD = 60^\circ \dots\dots\dots 1p$

$$b) \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp VO \\ AC \cap VO = \{O\} \end{cases} \Rightarrow BD \perp (VAC), \begin{cases} BD \perp (VAC) \\ CN \subset (VAC) \end{cases} \Rightarrow BD \perp CN \dots\dots\dots 1p$$

$CN = 6\sqrt{5}$ cm ($\triangle VNC$ dreptunghic în V), $MO = 3\sqrt{5}$ cm ($\triangle MM_1O$ dreptunghic în M_1). (Punctele N și O mijloacele laturilor VA respectiv $AC \Rightarrow NO \parallel VC$; $CN \cap MO = \{Q\} \Rightarrow$

$$\triangle ONQ \sim \triangle MCQ \Rightarrow \frac{NO}{MC} = \frac{NQ}{CQ} = \frac{OQ}{MQ} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{6}{9} = \frac{NQ}{CQ} = \frac{OQ}{MQ} \Rightarrow NQ = \frac{12\sqrt{5}}{5} \text{ cm}; OQ = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ cm} \dots\dots\dots 1p$$

$$\triangle NOQ \text{ (R.T.P.)} \Leftrightarrow NO^2 = NQ^2 + OQ^2 \Rightarrow \triangle NOQ \text{ dreptunghic în } Q \Rightarrow CN \perp MO \dots\dots\dots 1p$$

$$\begin{cases} CN \perp BD \\ CN \perp MO \\ MO \cap BD = \{O\} \end{cases} \Rightarrow CN \perp (MBD) \dots\dots\dots 1p$$

- a) Fie M, N mijloacele laturilor DB respectiv DC . G_1 și G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ABD

$$\text{respectiv } ACD \Rightarrow \begin{cases} \frac{AG_1}{G_1M} = \frac{2}{1} \\ \frac{AG_2}{G_2N} = \frac{2}{1} \end{cases} \Rightarrow \frac{AG_1}{G_1M} = \frac{AG_2}{G_2N} \xRightarrow{\text{R.T.Th.}} G_1G_2 \parallel MN \dots\dots\dots 2p$$

$$\begin{cases} G_1G_2 \parallel MN \\ MN \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 \parallel (BCD) \dots\dots\dots 1p$$

- b) $\dots\dots\dots 2p$

$$\begin{cases} AC \parallel G_1O \\ G_1O \subset (G_1PQ) \end{cases} \Rightarrow AC \parallel (G_1PQ) \dots\dots\dots 2p$$